Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Théme : Suites réelles

Ecrire Un en fonction de n

Exercice :

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{-1}{2+U_n}, \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$

Soit la suite *V* définie sur IN par : $V_n = \dfrac{1}{1+U_n}$.

1°) Calculer U_1, U_2, V_1 et V_2.

2°) Calculer $V_{n+1} - V_n$ pour tout $n \in IN$, et déduire la nature de la suite (V_n).

3°) Calculer V_n en fonction de *n*, puis déduire U_n en fonction de *n*.

1°) a) $U_1 = \dfrac{-1}{2+U_0} = \boxed{-\dfrac{1}{4}}$

a) $U_2 = -\dfrac{1}{2+U_1} = -\dfrac{1}{2+\left(-\frac{1}{4}\right)} = \boxed{-\dfrac{4}{7}}$

a) $V_1 = \dfrac{1}{1+U_1} = \dfrac{1}{1+\left(-\frac{1}{4}\right)} = \boxed{\dfrac{4}{3}}$

a) $V_2 = \dfrac{1}{1+U_2} = \dfrac{1}{1+\left(-\frac{4}{7}\right)} = \boxed{\dfrac{7}{3}}$

2°) $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_{n+1}}$

$$= \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2+u_n}}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{2+u_n-1}{2+u_n}}$$

$$= \frac{2+u_n}{1+u_n}$$

Donc $\boxed{v_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{1+u_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

c) $v_{n+1} - v_n = \dfrac{2+u_n}{1+u_n} - \dfrac{1}{1+u_n}$

$$= \frac{1+u_n}{1+u_n} = 1$$

Donc $\boxed{v_{n+1} - v_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.}$

Ainsi (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.

3°) $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n = V_0 + n.r$

ou $r = 1$ et $V_0 = \frac{1}{3}$

Donc $\boxed{V_n = \frac{1}{3} + n \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

) On a $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n = \frac{1}{1+U_n}$

$\Rightarrow 1 + U_n = \frac{1}{V_n}$

$\Rightarrow U_n = \frac{1}{V_n} - 1$

$\Rightarrow U_n = \frac{1 - V_n}{V_n}$

$\Rightarrow U_n = \frac{1 - \frac{1}{3} - n}{\frac{1}{3} + n}$

$\Rightarrow \boxed{U_n = \frac{2 - 3n}{1 + 3n} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$